Separované proměnné - připomenutí

Základní úloha: řešíme rovnici $y' = g(y)f(x)$ pro f a g spojité.

Při hledání řešení postupujeme v následujících šesti krocích:

1. definiční obor funkce $f \to$ maximální intervaly $I_1, I_2, \dots$
2. definiční obor a nulové body funkce $g \to$ max. intervaly $J_1, J_2 \dots$
3. stacionární řešení (nulové body g)
4. zvolíme každé $I = I_k$ a $J = J_l$ najdeme
   - F primitivní k f na I
   - G primitivní k $\frac{1}{g}$ na J
5. pro $C \in \mathbb{R}$ najdeme maximální intervaly v množině $\{x \in I : F(x) + C \in G(J)\} \to$ řešení $G^{-1}(F(x) + C)$
6. lepení

Úprava na separované proměnné

Řešme rovnici $(x^2 - 1)y' = 2xy$. Rovnice není ve tvaru $y' = f(x)g(y)$, ale pro $x \neq \pm 1$ je ekvivalentní rovnici $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - 1} = f(x)g(y)$ pro $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ a $g(y) = y$.

Úprava na separované proměnné

Řešme rovnici $(x^2-1)y' = 2xy$. Rovnice není ve tvaru $y' = f(x)g(y)$, ale pro $x \neq \pm 1$ je ekvivalentní rovnici $y' = \dfrac{2xy}{x^2-1} = f(x)g(y)$ pro $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ a $g(y) = y$.

1. $I_1 = (-\infty, -1)$, $I_2 = (-1, 1)$, $I_3 = (1, \infty)$.
2. $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.
3. stacionární řešení je $y_1, y_2, y_3 = 0$ na I_1, I_2, I_3.

Úprava na separované proměnné

Řešme rovnici $(x^2-1)y' = 2xy$. Rovnice není ve tvaru $y' = f(x)g(y)$, ale pro $x \neq \pm 1$ je ekvivalentní rovnici $y' = \dfrac{2xy}{x^2-1} = f(x)g(y)$ pro $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ a $g(y) = y$.

1. $I_1 = (-\infty, -1)$, $I_2 = (-1, 1)$, $I_3 = (1, \infty)$.
2. $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.
3. stacionární řešení je $y_1, y_2, y_3 = 0$ na I_1, I_2, I_3.
4. $F(x) = \begin{cases} \log(x^2-1), & I = I_1, I_3, \\ \log(1-x^2), & I = I_2. \end{cases}$, $G(y) = \begin{cases} \log(-y), & J = J_1 \\ \log y, & J = J_2. \end{cases}$

Úprava na separované proměnné

Řešme rovnici $(x^2-1)y' = 2xy$. Rovnice není ve tvaru $y' = f(x)g(y)$, ale pro $x \neq \pm 1$ je ekvivalentní rovnici $y' = \dfrac{2xy}{x^2-1} = f(x)g(y)$ pro $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ a $g(y) = y$.

1. $I_1 = (-\infty, -1)$, $I_2 = (-1, 1)$, $I_3 = (1, \infty)$.
2. $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$.
3. stacionární řešení je $y_1, y_2, y_3 = 0$ na I_1, I_2, I_3.
4. $F(x) = \begin{cases} \log(x^2-1), & I = I_1, I_3, \\ \log(1-x^2), & I = I_2. \end{cases}$, $G(y) = \begin{cases} \log(-y), & J = J_1 \\ \log y, & J = J_2. \end{cases}$
5. $G(J) = (-\infty, \infty)$ a tedy
   $\{x \in I : F(x) + C \in G(J)\} = I$, $I = I_1, I_2, I_3$, $J = J_1, J_2$.
   $G^{-1}(t) = -e^t$, $J = J_1$, $G^{-1}(t) = e^t$, $J = J_2$
   $I = I_1$, $J = J_1$ dává $y_4(x) = -e^{\log(x^2-1)+C} = -e^C(x^2-1)$.
   $I = I_1$, $J = J_2$ dává $y_5(x) = e^{\log(x^2-1)+C} = e^C(x^2-1)$.

Úprava na separované proměnné

Řešme rovnici $y' = f(x)g(y)$ pro $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ a $g(y) = y$.

5. Na $(-\infty, -1)$ máme řešení

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 0, \\ y_4(x) &= -e^C(x^2-1), \\ y_5(x) &= e^C(x^2-1). \end{aligned}$$

Což můžeme kompaktně zapsat

$$\widetilde{y}_1(x) = K(x^2-1), \; K \in \mathbb{R}.$$

Úprava na separované proměnné

Řešme rovnici $y' = f(x)g(y)$ pro $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ a $g(y) = y$.

5. Na $(-\infty, -1)$ máme řešení

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 0, \\ y_4(x) &= -e^C(x^2-1), \\ y_5(x) &= e^C(x^2-1). \end{aligned}$$

Což můžeme kompaktně zapsat

$$\widetilde{y}_1(x) = K(x^2-1), \;\; K \in \mathbb{R}.$$

Podobně dostaneme

$$\begin{aligned} \widetilde{y}_2(x) &= K(x^2-1), \;\; x \in (-1, 1), \;\; K \in \mathbb{R}, \\ \widetilde{y}_3(x) &= K(x^2-1), \;\; x \in (1, \infty), \;\; K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Úprava na separované proměnné

Řešme rovnici $y' = f(x)g(y)$ pro $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ a $g(y) = y$.

6. Celkem máme řešení

$$\widetilde{y}_1(x) = K(x^2-1),\ x \in (-\infty,-1),\ K \in \mathbb{R},$$
$$\widetilde{y}_2(x) = K(x^2-1),\ x \in (-1,1),\ K \in \mathbb{R},$$
$$\widetilde{y}_3(x) = K(x^2-1),\ x \in (1,\infty),\ K \in \mathbb{R}.$$

Lepit nelze.

Úprava na separované proměnné

Řešme rovnici $y' = f(x)g(y)$ pro $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ a $g(y) = y$.

6. Celkem máme řešení

$$\widetilde{y}_1(x) = K(x^2-1),\ x \in (-\infty,-1),\ K \in \mathbb{R},$$
$$\widetilde{y}_2(x) = K(x^2-1),\ x \in (-1,1),\ K \in \mathbb{R},$$
$$\widetilde{y}_3(x) = K(x^2-1),\ x \in (1,\infty),\ K \in \mathbb{R}.$$

Lepit nelze.

Původně jsme ale řešili rovnici $(x^2-1)y' = 2xy$. Zde zjevně lepit lze a dostaneme řešení

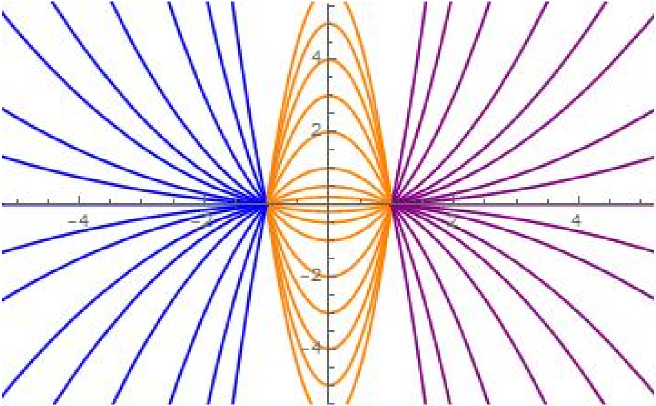
$$\overline{y}(x) = K(x^2-1),\ x \in \mathbb{R},\ K \in \mathbb{R}.$$

Navíc

$$\lim_{x\to-1-} \widetilde{y}_1(x) = \lim_{x\to-1-} K(x^2-1) = 0,$$
$$\lim_{x\to-1+} \widetilde{y}_2(x) = \lim_{x\to-1+} K(x^2-1) = 0,$$
$$\lim_{x\to-1-} \widetilde{y}_1'(x) = \lim_{x\to-1-} 2Kx = -2K,$$
$$\lim_{x\to-1+} \widetilde{y}_2'(x) = \lim_{x\to-1+} 2Kx = -2K.$$

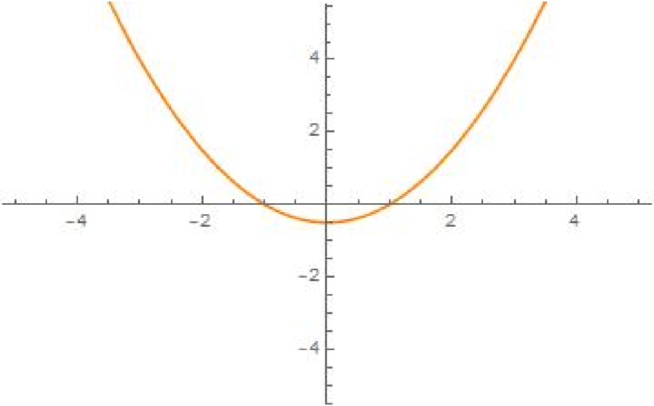
Úprava na separované proměnné

Před lepením:



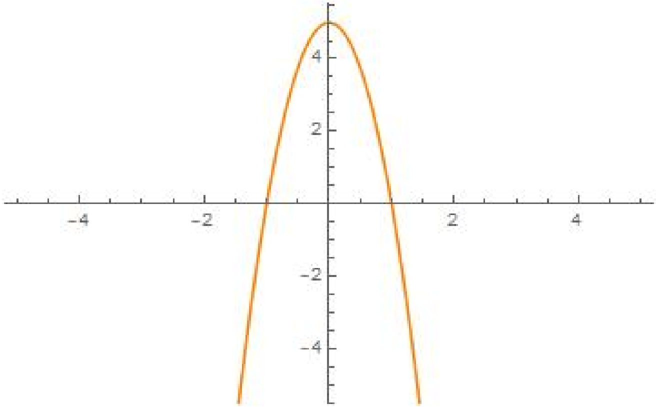
Úprava na separované proměnné

Po lepení:



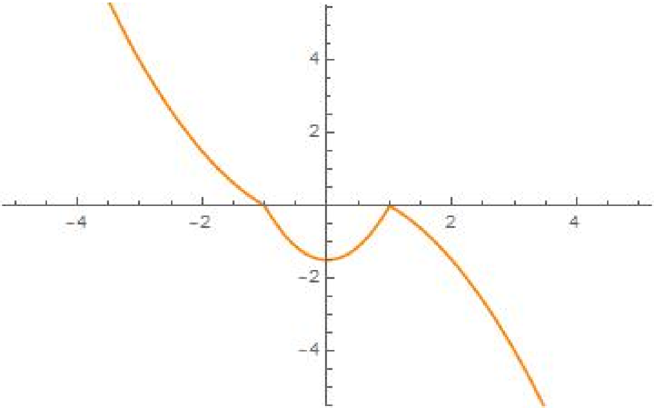
Úprava na separované proměnné

Po lepení:



Úprava na separované proměnné

Po lepení?



Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

Řešme rovnici $x^2y' = y(x-y)$. Ta je pro $x \neq 0$ ekvivalentni rovnici $y' = \frac{y(x-y)}{x^2} = \frac{y}{x}\left(1 - \frac{y}{x}\right)$, budeme řešit substitucí $z = \frac{y}{x}$.

Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

Řešme rovnici $x^2y' = y(x-y)$. Ta je pro $x \neq 0$ ekvivalentni rovnici $y' = \frac{y(x-y)}{x^2} = \frac{y}{x}\left(1 - \frac{y}{x}\right)$, budeme řešit substitucí $z = \frac{y}{x}$.

Poznámka: tuto substituci můžeme použít pro rovnici $y' = f(x,y)$ vždy, pokud $F(\lambda x, \lambda y) = F(x,y)$, $\lambda \neq 0$ (stačí uvážit $\lambda = \frac{1}{x}$).
V našem případě máme

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y(\lambda x - \lambda y)}{(\lambda x)^2} = \frac{\lambda^2 y(x-y)}{\lambda^2 x^2} = \frac{y(x-y)}{x^2} = F(x,y).$$

Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

Řešme rovnici $x^2y' = y(x-y)$. Ta je pro $x \neq 0$ ekvivalentni rovnici $y' = \dfrac{y(x-y)}{x^2} = \dfrac{y}{x}\left(1 - \dfrac{y}{x}\right)$, budeme řešit substitucí $z = \frac{y}{x}$.

Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

Řešme rovnici $x^2y' = y(x-y)$. Ta je pro $x \neq 0$ ekvivalentni rovnici $y' = \dfrac{y(x-y)}{x^2} = \dfrac{y}{x}\left(1 - \dfrac{y}{x}\right)$, budeme řešit substitucí $z = \frac{y}{x}$.
Ta nám dává $y = xz$, $y' = xz' + z$ a tedy dostáváme rovnici $xz' + z = z(1-z)$, kterou upravíme na $xz' = -z^2$.

Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

Řešme rovnici $x^2y' = y(x-y)$. Ta je pro $x \neq 0$ ekvivalentni rovnici $y' = \frac{y(x-y)}{x^2} = \frac{y}{x}\left(1 - \frac{y}{x}\right)$, budeme řešit substitucí $z = \frac{y}{x}$.
Ta nám dává $y = xz$, $y' = xz' + z$ a tedy dostáváme rovnici $xz' + z = z(1-z)$, kterou upravíme na $xz' = -z^2$.
Tu lze opět (pro $x \neq 0$) převést na separované proměnné
$z' = -\frac{z^2}{x} = f(x)g(z)$ pro $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(z) = -z^2$.

Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

Řešme rovnici $x^2y' = y(x-y)$. Ta je pro $x \neq 0$ ekvivalentni rovnici
$y' = \dfrac{y(x-y)}{x^2} = \dfrac{y}{x}\left(1 - \dfrac{y}{x}\right)$, budeme řešit substitucí $z = \frac{y}{x}$.
Ta nám dává $y = xz$, $y' = xz' + z$ a tedy dostáváme rovnici
$xz' + z = z(1-z)$, kterou upravíme na $xz' = -z^2$.
Tu lze opět (pro $x \neq 0$) převést na separované proměnné
$z' = -\dfrac{z^2}{x} = f(x)g(z)$ pro $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(z) = -z^2$.

1. $I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = (0, \infty)$,
2. nulový bod 0, $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$,
3. stacionární řešení $z_1, z_2 = 0$ na I_1, I_2,

Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

Řešme rovnici $x^2y' = y(x-y)$. Ta je pro $x \neq 0$ ekvivalentni rovnici $y' = \dfrac{y(x-y)}{x^2} = \dfrac{y}{x}\left(1 - \dfrac{y}{x}\right)$, budeme řešit substitucí $z = \frac{y}{x}$.
Ta nám dává $y = xz$, $y' = xz' + z$ a tedy dostáváme rovnici $xz' + z = z(1-z)$, kterou upravíme na $xz' = -z^2$.
Tu lze opět (pro $x \neq 0$) převést na separované proměnné $z' = -\dfrac{z^2}{x} = f(x)g(z)$ pro $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(z) = -z^2$.

1. $I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = (0, \infty)$,
2. nulový bod 0, $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$,
3. stacionární řešení $z_1, z_2 = 0$ na I_1, I_2,
4. $$F(x) = \begin{cases} \log(-x), & I = I_1 \\ \log(x), & I = I_2 \end{cases}, \quad G(x) = \frac{1}{z}, \; J = J_1, J_2$$

.

Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

Řešíme rovnici $z' = -\frac{z^2}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(z) = -z^2$.

1. $I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = (0, \infty)$,
2. nulový bod 0, $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$,
3. stacionární řešení $z_1 = 0$,
4. $$F(x) = \begin{cases} \log(-x), & I = I_1 \\ \log(x), & I = I_2 \end{cases}, \quad G(x) = \frac{1}{z}, \; J = J_1, J_2$$

.

Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

Řešíme rovnici $z' = -\frac{z^2}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(z) = -z^2$.

1. $I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = (0, \infty)$,
2. nulový bod 0, $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$,
3. stacionární řešení $z_1 = 0$,
4. $$F(x) = \begin{cases} \log(-x), & I = I_1 \\ \log(x), & I = I_2 \end{cases}, \quad G(x) = \frac{1}{z}, \; J = J_1, J_2$$
   .
5. $I = I_1 = (-\infty, 0)$, $J = J_1 = (-\infty, 0)$, $F(x) = \log(-x)$, $G(z) = \frac{1}{z}$.
   $$\begin{aligned} \{x \in I : F(x) + C \in G(J)\} &= \{x \in (-\infty, 0) : \log(-x) + C \in (-\infty, 0)\} \\ &= (-e^{-C}, 0) \end{aligned}$$
   $$G^{-1}(t) = \frac{1}{t} \text{ pak dává } z_3(x) = \frac{1}{\log(-x) + C}, \; x \in (-e^{-C}, 0), C \in \mathbb{R}.$$

Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

Řešíme rovnici $z' = -\frac{z^2}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(z) = -z^2$.

1. $I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = (0, \infty)$,
2. nulový bod 0, $J_1 = (-\infty, 0)$, $J_2 = (0, \infty)$,
3. stacionární řešení $z_1 = 0$,
4. $$F(x) = \begin{cases} \log(-x), & I = I_1 \\ \log(x), & I = I_2 \end{cases}, \quad G(x) = \frac{1}{z}, \ J = J_1, J_2$$

   .
5. $I = I_1 = (-\infty, 0)$, $J = J_2 = (0, \infty)$, $F(x) = \log(-x)$, $G(z) = \frac{1}{z}$.

$$\{x \in I : F(x) + C \in G(J)\} = \{x \in (-\infty, 0) : \log(-x) + C \in (0, \infty)\} = (-\infty, -e^{-C})$$

$$G^{-1}(t) = \frac{1}{t} \text{ dává } z_4(x) = \frac{1}{\log(-x) + C}, \ x \in (-\infty, -e^{-C}), C \in \mathbb{R}.$$

Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

Řešíme rovnici $z' = -\frac{z^2}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(z) = -z^2$.

6. Máme řešení

$$z_1(x) = 0,\ x \in (-\infty, 0), \quad z_2(x) = 0,\ x \in (0, \infty),$$
$$z_3(x) = \frac{1}{\log(-x) + C},\ x \in (-e^{-C}, 0),\ C \in \mathbb{R},$$
$$z_4(x) = \frac{1}{\log(-x) + C},\ x \in (-\infty, -e^{-C}),\ C \in \mathbb{R},$$
$$z_5(x) = \frac{1}{\log(x) + C},\ x \in (0, e^{-C}),\ C \in \mathbb{R},$$
$$z_6(x) = \frac{1}{\log(x) + C},\ x \in (e^{-C}, \infty),\ C \in \mathbb{R}.$$

Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

Řešíme rovnici $z' = -\frac{z^2}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(z) = -z^2$.

6. Máme řešení

$$
\begin{aligned}
z_1(x) &= 0,\ x \in (-\infty, 0), \quad z_2(x) = 0,\ x \in (0, \infty),\\
z_3(x) &= \frac{1}{\log(-x) + C},\ x \in (-e^{-C}, 0),\ C \in \mathbb{R},\\
z_4(x) &= \frac{1}{\log(-x) + C},\ x \in (-\infty, -e^{-C}),\ C \in \mathbb{R},\\
z_5(x) &= \frac{1}{\log(x) + C},\ x \in (0, e^{-C}),\ C \in \mathbb{R},\\
z_6(x) &= \frac{1}{\log(x) + C},\ x \in (e^{-C}, \infty),\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Žádné lepení, protože limita v $\pm e^{-C}$ je vždy $\pm\infty$.

Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

Řešíme rovnici $z' = -\frac{z^2}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(z) = -z^2$.

6. Máme řešení

$$z_1(x) = 0,\ x \in (-\infty, 0), \quad z_2(x) = 0,\ x \in (0, \infty),$$
$$z_3(x) = \frac{1}{\log(-x) + C},\ x \in (-e^{-C}, 0),\ C \in \mathbb{R},$$
$$z_4(x) = \frac{1}{\log(-x) + C},\ x \in (-\infty, -e^{-C}),\ C \in \mathbb{R},$$
$$z_5(x) = \frac{1}{\log(x) + C},\ x \in (0, e^{-C}),\ C \in \mathbb{R},$$
$$z_6(x) = \frac{1}{\log(x) + C},\ x \in (e^{-C}, \infty),\ C \in \mathbb{R}.$$

Žádné lepení, protože limita v $\pm e^{-C}$ je vždy $\pm\infty$.
Co ale rovnice $xz' = -z^2$? Zde bychom případně mohli lepit v $x = 0$.

Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

Řešíme rovnici $xz' = -z^2$. Pro $x \neq 0$ máme řešení

$$
\begin{aligned}
z_1(x) &= 0,\ x \in (-\infty, 0), \quad z_2(x) = 0,\ x \in (0, \infty),\\
z_3(x) &= \frac{1}{\log(-x) + C},\ x \in (-e^{-C}, 0),\ C \in \mathbb{R}.\\
z_4(x) &= \frac{1}{\log(-x) + C},\ x \in (-\infty, -e^{-C}),\ C \in \mathbb{R},\\
z_5(x) &= \frac{1}{\log(x) + C},\ x \in (0, e^{-C}),\ C \in \mathbb{R},\\
z_6(x) &= \frac{1}{\log(x) + C},\ x \in (e^{-C}, \infty),\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Určitě můžeme nalepit z_1 a z_2, dále

$$\lim_{x \to 0-} z_3(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{1}{\log(-x) + C} = 0 = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\log(x) + C} = \lim_{x \to 0+} z_5(x)$$

ale $\displaystyle\lim_{x \to 0-} z_3'(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{-\frac{1}{x}}{(\log(-x) + C)^2} = \infty, \quad \lim_{x \to 0+} z_5'(x) = -\infty.$

Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

$\lim_{x \to 0-} z_3(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0+} z_5(x) = 0$ ale
$\lim_{x \to 0-} z_3'(x) = \infty, \quad \lim_{x \to 0+} z_5'(x) = -\infty.$
Tedy funkce

$$\tilde{z}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log(-x)+C}, & x \in (-e^{-C}, 0), \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1}{\log(x)+D}, & x \in (0, e^{-D}). \end{cases}$$

Je sice spojitá, ale platí $\tilde{z}_{\pm}'(0) = \mp\infty$ (a podobně pro lepení na z_1,z_2).

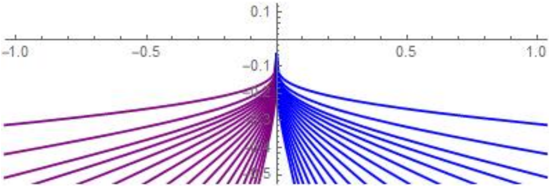
Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

$$\lim_{x\to 0-} z_3(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0+} z_5(x) = 0 \text{ ale}$$
$$\lim_{x\to 0-} z_3'(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0+} z_5'(x) = -\infty.$$

Tedy funkce

$$\tilde{z}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log(-x)+C}, & x \in (-e^{-C}, 0), \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1}{\log(x)+D}, & x \in (0, e^{-D}). \end{cases}$$

Je sice spojitá, ale platí $\tilde{z}_\pm'(0) = \mp\infty$ (a podobně pro lepení na z_1,z_2).

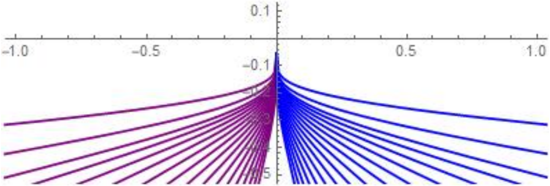


Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

$\lim_{x\to 0-} z_3(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+} z_5(x) = 0$ ale
$\lim_{x\to 0-} z_3'(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0+} z_5'(x) = -\infty$.
Tedy funkce

$$\tilde{z}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log(-x)+C}, & x \in (-e^{-C}, 0), \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1}{\log(x)+D}, & x \in (0, e^{-D}). \end{cases}$$

Je sice spojitá, ale platí $\tilde{z}_{\pm}'(0) = \mp\infty$ (a podobně pro lepení na z_1,z_2).



Co ale původní rovnice $y' = \frac{y(x-y)}{x^2}$, resp. $x^2 y' = y(x-y)$? ($y = xz$)

Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

Řešíme rovnici $x^2y' = y(x-y)$. Protože $y = xz$, máme pro $x \neq 0$ řešení

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= 0, x \in \mathbb{R},\\
y_2(x) &= \frac{x}{\log(-x)+C},\ x \in (-e^{-C}, 0), C \in \mathbb{R},\\
y_3(x) &= \frac{x}{\log(-x)+C},\ x \in (-\infty, -e^{-C}), C \in \mathbb{R},\\
y_4(x) &= \frac{x}{\log(x)+C},\ x \in (0, e^{-C}), C \in \mathbb{R},\\
y_5(x) &= \frac{x}{\log(x)+C},\ x \in (e^{-C}, \infty), C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

$\lim_{x\to 0-} y_2(x) = 0 = \lim_{x\to 0+} y_4(x)$, nyní ale

$$
\lim_{x\to 0-} y_2'(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{\log(-x)+C-1}{(\log(-x)+C)^2} = 0 = \lim_{x\to 0+} y_4'(x).
$$

Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

$$\lim_{x\to 0-} y_2(x) = 0, \ \lim_{x\to 0+} y_4(x) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0-} y_2'(x) = 0, \ \lim_{x\to 0+} y_4'(x) = 0.$$

Tedy funkce

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\log(-x)+C}, & x \in (-e^{-C}, 0), \\ 0, & x = 0, \\ \frac{x}{\log(-x)+D}, & x \in (0, e^{-D}). \end{cases}$$

Jespojitá a splňuje $\tilde{y}_\pm'(0) = 0$ a je řešením rovnice $x^2 y' = y(x-y)$ na $(-e^{-C}, e^{-D})$.

Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

$$\lim_{x\to 0-} y_2(x) = 0, \ \lim_{x\to 0+} y_4(x) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0-} y_2'(x) = 0, \ \lim_{x\to 0+} y_4'(x) = 0.$$

Tedy funkce

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\log(-x)+C}, & x \in (-e^{-C}, 0), \\ 0, & x = 0, \\ \frac{x}{\log(-x)+D}, & x \in (0, e^{-D}). \end{cases}$$

Jespojitá a splňuje $\tilde{y}_\pm'(0) = 0$ a je řešením rovnice $x^2 y' = y(x-y)$ na $(-e^{-C}, e^{-D})$.

Podobně jsou řešeními i funkce

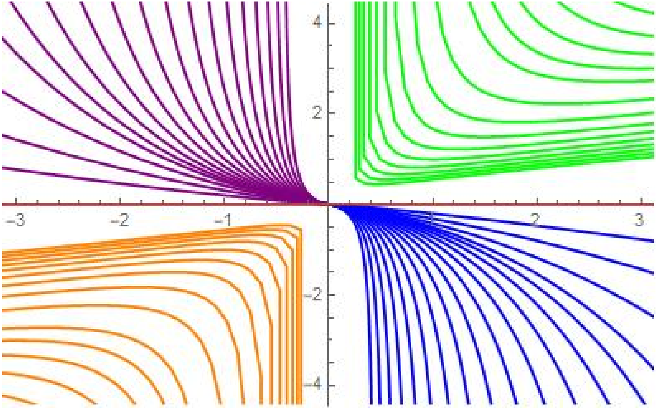
$$\tilde{y}_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{\log(-x)+C}, & x \in (-e^{-C}, 0), \\ 0, & x \in [0, \infty). \end{cases}$$

a

$$\tilde{y}_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ \frac{x}{\log(-x)+D}, & x \in (0, e^{-D}). \end{cases}$$

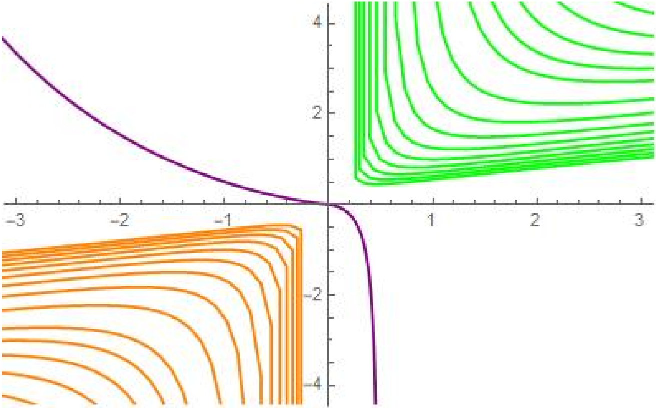
Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

Před lepením:



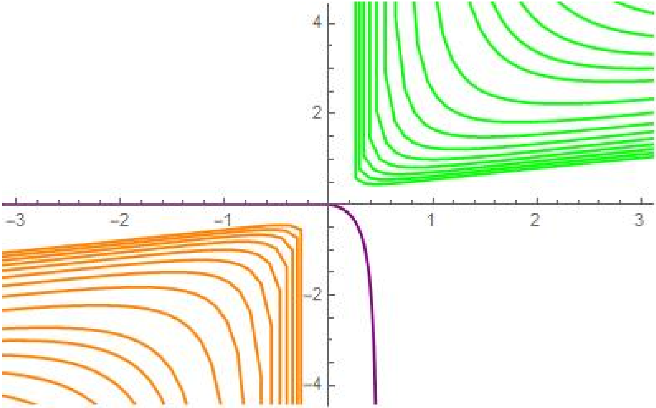
Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

Po lepení:



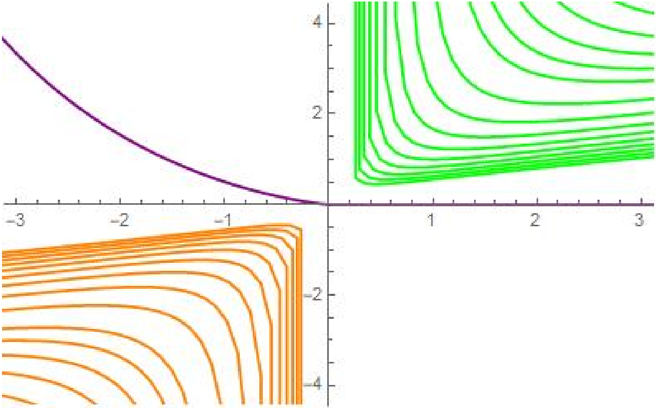
Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

Po lepení:



Úprava na separované proměnné - homogenní rovnice

Po lepení:



Úprava na separované proměnné - lineární substituce

Leckdy si lze pomoci následujícími substitucemi:

- $u = x + \alpha,\ v = y + \beta,$
- $z = \alpha x + \beta y + \gamma.$

Úprava na separované proměnné - lineární substituce

Leckdy si lze pomoci následujícími substitucemi:

- $u = x + \alpha$, $v = y + \beta$,
- $z = \alpha x + \beta y + \gamma$.

Například uvažme rovnici $y' = \dfrac{x + 2y - 3}{x - y + 3}$.
Zavedením $u = x + 1$ a $v = y - 2$ dostaneme

$$v' = y' = \frac{x + 2y - 3}{x - y + 3} = y' = \frac{(x+1) + 2(y-2)}{(x+1) - (y-2)} = \frac{u + 2v}{u - v}.$$

snadno ověříme, že $v' = \frac{u+2v}{u-v}$ je homogenní.

Úprava na separované proměnné - lineární substituce

Leckdy si lze pomoci následujícími substitucemi:

- $u = x + \alpha$, $v = y + \beta$,
- $z = \alpha x + \beta y + \gamma$.

Například uvažme rovnici $y' = \dfrac{x + 2y - 3}{x - y + 3}$.
Zavedením $u = x + 1$ a $v = y - 2$ dostaneme

$$v' = y' = \frac{x + 2y - 3}{x - y + 3} = y' = \frac{(x + 1) + 2(y - 2)}{(x + 1) - (y - 2)} = \frac{u + 2v}{u - v}.$$

snadno ověříme, že $v' = \frac{u+2v}{u-v}$ je homogenní.

Obdobně (mimo jiné) pro mnoho rovnic tvaru $y' = \dfrac{ax + by + c}{dx + ey + f}$

(jde pouze o řešení soustavy lineárních rovníc pro proměnné α a β).

Úprava na separované proměnné - lineární substituce

Leckdy si lze pomoci následujícími substitucemi:

- $u = x + \alpha$, $v = y + \beta$,
- $z = \alpha x + \beta y + \gamma$.

Uvažme ještě rovnici $y' = \dfrac{1}{x + y + 1}$.

Tenotokrát zkusíme substituci $z = x + y + 1$.

Úprava na separované proměnné - lineární substituce

Leckdy si lze pomoci následujícími substitucemi:

- $u = x + \alpha$, $v = y + \beta$,
- $z = \alpha x + \beta y + \gamma$.

Uvažme ještě rovnici $y' = \dfrac{1}{x + y + 1}$.
Tenotokrát zkusíme substituci $z = x + y + 1$.

$$z' - 1 = (z - x - 1)' = y' = \frac{1}{x + y + 1} = \frac{1}{z}.$$

Po úpravě: $z' = \dfrac{z + 1}{z}$.

Úprava na separované proměnné - lineární substituce

Řešíme rovnici $z' = \dfrac{z+1}{z}$, $f(x) = 1$, $g(z) = \dfrac{z+1}{z}$.

1. $I_1 = \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nulový bod -1,
   $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (-1, 0)$, $J_3 = (0, \infty)$.
3. stacionární řešení $z_1 = -1$.

Úprava na separované proměnné - lineární substituce

Řešíme rovnici $z' = \dfrac{z+1}{z}$, $f(x) = 1$, $g(z) = \dfrac{z+1}{z}$.

1. $I_1 = \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nulový bod -1,
   $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (-1, 0)$, $J_3 = (0, \infty)$.
3. stacionární řešení $z_1 = -1$.
4. $F(x) = x$, $I = I_1$, $G(z) = \begin{cases} z - \log(-z-1), & z \in J = J_1 \\ z - \log(z+1), & z \in J = J_2, J_3. \end{cases}$

$$\int \frac{1}{g(z)}\, dz = \int \frac{z}{z+1}\, dz = \int 1 - \frac{1}{z+1}\, dz \overset{c}{=} z - \log|z+1|.$$

Úprava na separované proměnné - lineární substituce

Řešíme rovnici $z' = \dfrac{z+1}{z}$, $f(x) = 1$, $g(z) = \dfrac{z+1}{z}$.

1. $I_1 = \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nulový bod -1,
   $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (-1, 0)$, $J_3 = (0, \infty)$.
3. stacionární řešení $z_1 = -1$.
4. $F(x) = x$, $I = I_1$, $G(z) = \begin{cases} z - \log(-z-1), & z \in J = J_1 \\ z - \log(z+1), & z \in J = J_2, J_3. \end{cases}$

Úprava na separované proměnné - lineární substituce

Řešíme rovnici $z' = \dfrac{z+1}{z}$, $f(x) = 1$, $g(z) = \dfrac{z+1}{z}$.

1. $I_1 = \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nulový bod -1,
   $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (-1, 0)$, $J_3 = (0, \infty)$.
3. stacionární řešení $z_1 = -1$.
4. $F(x) = x$, $I = I_1$, $G(z) = \begin{cases} z - \log(-z-1), & z \in J = J_1 \\ z - \log(z+1), & z \in J = J_2, J_3. \end{cases}$
5. $I = I_1 = (-\infty, \infty)$, $J = J_1 = (-\infty, -1)$,
   $F(x) = x$, $G(z) = z - \log(-z-1)$.

   $$\lim_{z \to -\infty} G(z) = -\infty, \quad \lim_{z \to -1-} G(z) = \infty \text{ a tedy } G(J) = (-\infty, \infty).$$

   To dává $\{x \in I : F(x) + C \in G(J)\} = (-\infty, \infty)$.

Úprava na separované proměnné - lineární substituce

Řešíme rovnici $z' = \dfrac{z+1}{z}$, $f(x) = 1$, $g(z) = \dfrac{z+1}{z}$.

1. $I_1 = \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nulový bod -1,
   $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (-1, 0)$, $J_3 = (0, \infty)$.
3. stacionární řešení $z_1 = -1$.
4. $F(x) = x$, $I = I_1$, $G(z) = \begin{cases} z - \log(-z-1), & z \in J = J_1 \\ z - \log(z+1), & z \in J = J_2, J_3. \end{cases}$
5. $I = I_1 = (-\infty, \infty)$, $J = J_1 = (-\infty, -1)$,
   $F(x) = x$, $G(z) = z - \log(-z-1)$.

   $\lim\limits_{z \to -\infty} G(z) = -\infty$, $\lim\limits_{z \to -1-} G(z) = \infty$ a tedy $G(J) = (-\infty, \infty)$.

   To dává $\{x \in I : F(x) + C \in G(J)\} = (-\infty, \infty)$.

   Inverzní funkci k $G(z) = z - \log(-z-1)$ nelze snadno vyjádřit (ale existuje, protože G je rostoucí), označme ji p_2.
   Víme, že $\lim\limits_{x \to -\infty} p_2(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} p_2(x) = -1$,
   p_2 je rostoucí (a konkávní).

Úprava na separované proměnné - lineární substituce

Řešíme rovnici $z' = \dfrac{z+1}{z}$, $f(x) = 1$, $g(z) = \dfrac{z+1}{z}$.

1. $I_1 = \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nulový bod -1,
   $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (-1, 0)$, $J_3 = (0, \infty)$.
3. stacionární řešení $z_1 = -1$.
4. $F(x) = x$, $I = I_1$, $G(z) = \begin{cases} z - \log(-z-1), & z \in J = J_1 \\ z - \log(z+1), & z \in J = J_2, J_3. \end{cases}$
5. $I = I_1 = (-\infty, \infty)$, $J = J_2 = (-1, 0)$,
   $F(x) = x$, $G(z) = z - \log(z+1)$.

   $\lim\limits_{z \to -1+} G(z) = \infty$, $\lim\limits_{z \to 0-} G(z) = 0$ a tedy $G(J) = (0, \infty)$.

   To dává
   $\{x \in I : F(x) + C \in G(J)\} = \{x \in \mathbb{R} : x + C \in (0, \infty)\} = (-C, \infty)$.

   Inverzní funkci k $G(z) = z - \log(z+1)$, $z \in (-1, 0)$ nelze snadno vyjádřit (ale existuje, protože G je klesající), označme ji p_3.
   Víme, že $\lim\limits_{x \to 0+} p_3(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} p_3(x) = -1$,
   p_3 je klesající (a konvexní).

Úprava na separované proměnné - lineární substituce

Řešíme rovnici $z' = \dfrac{z+1}{z}$, $f(x) = 1$, $g(z) = \dfrac{z+1}{z}$.

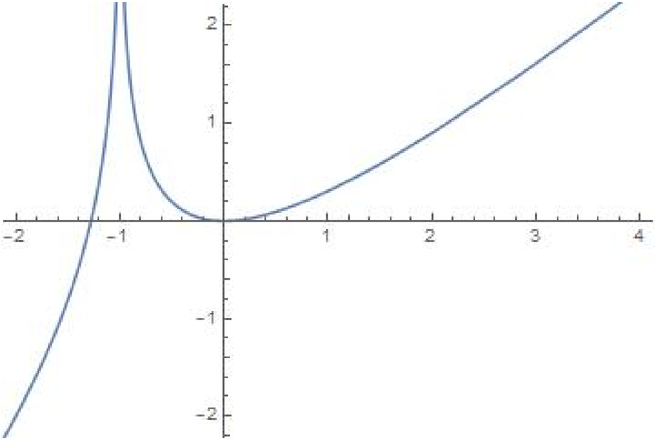
1. $I_1 = \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nulový bod -1,
   $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (-1, 0)$, $J_3 = (0, \infty)$.
3. stacionární řešení $z_1 = -1$.
4. $F(x) = x$, $I = I_1$, $G(z) = \begin{cases} z - \log(-z-1), & z \in J = J_1 \\ z - \log(z+1), & z \in J = J_2, J_3. \end{cases}$
5. $I = I_1 = (-\infty, \infty)$, $J = J_3 = (0, \infty)$, $F(x) = x$,
   $G(z) = z - \log(z+1)$.

   $\lim_{z \to 0+} G(z) = 0$, $\lim_{z \to \infty} G(z) = \infty$ a tedy $G(J) = (0, \infty)$.

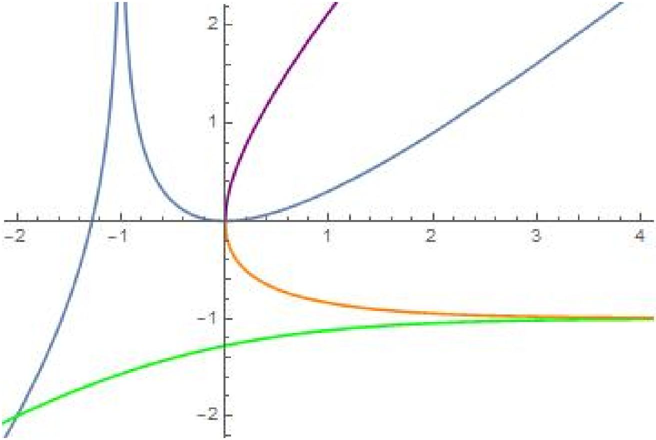
   To dává
   $\{x \in I : F(x) + C \in G(J)\} = \{x \in \mathbb{R} : x + C \in (0, \infty)\} = (-C, \infty)$.

   Inverzní funkci k $G(z) = z - \log(z+1)$, $z \in (0, \infty)$ nelze snadno vyjádřit (ale existuje, protože G je rostoucí), označme ji p_4.
   Víme, že $\lim_{x \to 0+} p_4(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} p_4(x) = \infty$,
   p_4 je rostoucí (a konkávní).

Úprava na separované proměnné - lineární substituce



Úprava na separované proměnné - lineární substituce



Úprava na separované proměnné - lineární substituce

Řešíme rovnici $z' = \dfrac{z+1}{z}$.

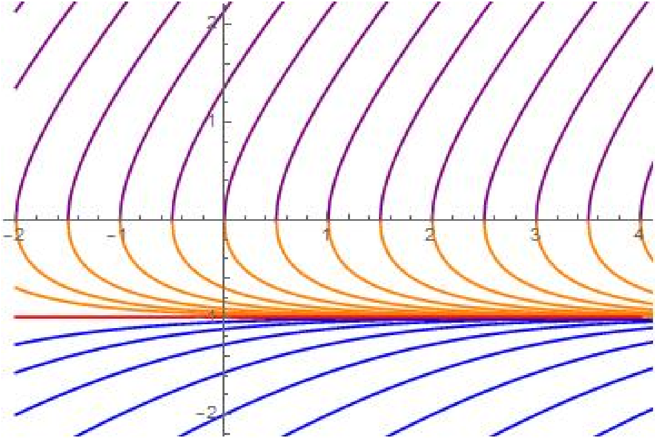
6. Máme tedy řešení

$$\begin{aligned} z_1(x) &= -1,\ x \in (-\infty, \infty), \\ z_2(x) &= p_2(x+C),\ x \in (-\infty, \infty), \\ z_3(x) &= p_3(x+C),\ x \in (-C, \infty), \\ z_4(x) &= p_4(x+C),\ x \in (-C, \infty). \end{aligned}$$

Víme, že $\lim\limits_{x \to 0+} p_3(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+} p_4(x) = 0$,
Tedy $\lim\limits_{x \to -C+} z_3(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -C+} z_4(x) = 0$
Lepit tedy nelze.

Úprava na separované proměnné - lineární substituce

Řešení rovnice $z' = \dfrac{z+1}{z}$.



Úprava na separované proměnné - lineární substituce

Rovnice $z' = \dfrac{z+1}{z}$ má řešení

$$
\begin{aligned}
z_1(x) &= -1,\ x \in (-\infty, \infty),\\
z_2(x) &= p_2(x + C),\ x \in (-\infty, \infty),\\
z_3(x) &= p_3(x + C),\ x \in (-C, \infty),\\
z_4(x) &= p_4(x + C),\ x \in (-C, \infty).
\end{aligned}
$$

Úprava na separované proměnné - lineární substituce

Rovnice $z' = \dfrac{z+1}{z}$ má řešení

$$\begin{aligned} z_1(x) &= -1,\ x \in (-\infty, \infty), \\ z_2(x) &= p_2(x + C),\ x \in (-\infty, \infty), \\ z_3(x) &= p_3(x + C),\ x \in (-C, \infty), \\ z_4(x) &= p_4(x + C),\ x \in (-C, \infty). \end{aligned}$$

Původní rovnice $y' = \dfrac{1}{x+y+1}$ má tedy řešení
(po dosazení $y = z - x - 1$)

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -x - 2,\ x \in (-\infty, \infty), \\ y_2(x) &= p_2(x + C) - x - 1,\ x \in (-\infty, \infty), \\ y_3(x) &= p_3(x + C) - x - 1,\ x \in (-C, \infty), \\ y_4(x) &= p_4(x + C) - x - 1,\ x \in (-C, \infty). \end{aligned}$$

Úprava na separované proměnné - lineární substituce

Řešení rovnice $y' = \dfrac{1}{x+y+1}$.